1. Método de momentos

Elijamos como estimaciones aquellos valores de los parámetros que sean soluciones de la ecuación $\mu'_k = m'_k$ para $k = 1, 2, ..., t$, donde t es el número de parámetros a estimar.

Como sabemos, $\mu'_k = E[Y^k]$, con μ'_k representando la k-ésima derivada de la función generadora de momentos evaluada en cero. El k-ésimo momento muestral correspondiente es el promedio

$$m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^k.$$

Por lo tanto, el método de los momentos tiene la idea de que los momentos muestrales deben proveer estimaciones acertadas acerca de los momentos poblacionales.

<u>Ejemplo</u>. Una urna contiene θ bolas negras y $N-\theta$ bolas blancas. Se selecciona una muestra de n bolas sin reemplazo. Sea Y el número de bolas negras en la muestra. Demuestre que $\dfrac{N\bar{Y}}{n}$ es el estimador para θ.

<u>Solución</u>.
Este experimento sigue una distribución de tipo hipergeometrica, con parámetros N, n y θ. Como sabemos $\bar{Y}$ es el mejor estimador para $E[Y]$, que por ser hipergeometrica es

$$E[Y] = \frac{n\theta}{N} = \bar{Y} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{N}{n}\bar{Y}.$$

<u>Ejemplo</u>. Si Y_1, Y_2, ..., Y_n denota una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2, encuentre los estimadores de μ y σ^2 por el método de momentos.

<u>Solución</u>.
Como sabemos $E[Y] = \mu = \bar{Y}$ y $E[Y^2] = \sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$, despejando tenemos

$$\sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \Rightarrow \sigma^2 + \bar{Y}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \bar{Y}^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\bar{Y}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}{n}.$$

Por lo tanto $\hat{\mu} = \bar{Y}$ y $\hat{\sigma^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}{n}$.

Es importante notar que $\hat{\mu}$ es insesgado y $\hat{\sigma^2}$ no lo es, sin embargo este último se puede modificar fácilmente para que sea insesgado.

2. Método de máxima verosimilitud

Suponga que la función de verosimilitud depende de k parámetros θ_1, θ_2, ..., θ_k. Elija como estimaciones aquellos valores de los parámetros que maximizan la verosimilitud $L(y_1, y_2, ..., y_n|\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$.

Ejemplo. Suponga que Y_1, Y_2, ..., Y_n denota una muestra aleatoria de la distribución de Poisson con media λ.

a Encuentre el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\lambda}$ para λ.
b Encuentre el valor esperado y la varianza de $\hat{\lambda}$.
c Demuestre que el estimador del inciso a) es consistente para λ.

Solución.
La verosimilitud en este caso es

$$L(\lambda) = p(y_1, ..., y_n|\lambda) = p(y_1|\lambda)...p(y_n|\lambda) = \frac{\lambda^{y_1}e^{-\lambda}}{y_1!}...\frac{\lambda^{y_n}e^{-\lambda}}{y_n!}$$

$$= \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^n y_i!}.$$

Para facilitar los cálculos trabajaremos con $ln[L(\lambda)]$, y nos queda

$$\ln[L(\lambda)] = \ln(\lambda)\sum_{i=1}^n y_i - n\lambda - \sum_{i=1}^n \ln(y_i!)$$

Derivando nos queda:

$$\frac{d\ln[L(\lambda)]}{d\lambda} = \frac{1}{\hat{\lambda}}\sum_{i=1}^n y_i - n = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{Y}.$$

Ahora conseguimos su valor esperado y su varianza

$$E[\hat{\lambda}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[Y_i] = \lambda.$$

$$V(\hat{\lambda}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n V(Y_i) = \frac{\lambda}{n}.$$

Para demostrar que el estimador es consistente debemos ver que $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\lambda}) = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\lambda}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{n} = 0.$$

Por lo tanto es consistente.

<u>Ejemplo</u>. Sea Y_1, Y_2, ..., Y_n una muestra de una distribución normal con media μ y varianza σ^2. Obtenga los estimadores de máxima verosimilitud de μ y σ^2.

<u>Solución</u>.

$$L(\mu, \sigma^2) = f(y_1, y_2, ..., y_n|\mu, \sigma^2) = f(y_1|\mu, \sigma^2)...f(y_n|\mu, \sigma^2)$$

$$= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\dfrac{(y_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right\} ... \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\dfrac{(y_n-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{n/2} e^{-\dfrac{1}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2}.$$

Para facilitar el cálculo trabajaremos con $\ln[L(\mu, \sigma^2)]$. Luego

$$\ln[L(\mu, \sigma^2)] = -\frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2$$

Para conseguir los estimadores de máxima verosimilitud, queremos maximizar $ln[L(\mu, \sigma^2)]$ respecto a los parámetros desconocidos, en este caso

$$\frac{\partial \ln[L(\mu, \sigma^2)]}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu).$$

$$\frac{\partial \ln[L(\mu, \sigma^2)]}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2.$$

Igualando a cero nos queda

$$\frac{1}{\hat{\sigma^2}}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\mu}) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i - n\hat{\mu} = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{Y}.$$

y sustituyendo

$$-\frac{n}{2\hat{\sigma^2}} + \frac{1}{2\hat{\sigma^4}} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{Y})^2 = 0 \Rightarrow \hat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{Y})^2}{n}.$$

<u>Ejemplo</u>. Sea Y_1, Y_2, ..., Y_n una muestra aleatoria de observaciones de una distribución uniforme con función de densidad de probabilidad $f(y_i|\theta) = 1/\theta$, para $0 \leq y_i \leq \theta$ e $i = 1, ..., n$. Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de θ.

<u>Solución</u>.
La verosimilitud es

$$L(\theta) = f(y_1, y_2, ..., y_n|\theta) = f(y_1|\theta)...f(y_n|\theta) = \frac{1}{\theta}...\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^n}.$$

Por otro lado

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta^{n-1}}$$

Y claramente no existe ningún valor de θ tal que esa derivada se anule. Sin embargo mientras más pequeño es θ, más grande es el valor de la verosimilitud, por lo tanto estamos interesados en el valor más pequeño de θ, el cual se consigue con el valor más grande de las observaciones. Luego tomaremos $\hat{\theta} = Y_{(n)} = \text{máx}(Y_1, ..., Y_n)$. Aunque el máximo no es insesgado, se puede adaptar para que una función de él lo sea.